Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Katarzyny Ryszewskiej

A semigroup approach to the space-fractional diffusion and the analysis of fractional Stefan models

Łukasz Płociniczak

11 lutego 2021

Rozprawa doktorska mgr Katarzyny Ryszewskiej napisana została pod kierunkiem prof. Piotra Rybki oraz dr. Adama Kubicy. Jest to dość obszerna dysertacja sporządzona w języku angielskim, licząca 139 stron oraz zawierająca 5 rozdziałów i bibliografię. Na wstępie chciałbym zaznaczyć, że większość wyników otrzymanych przez Panią Ryszewską oraz umieszczonych w rozprawie jest oryginalna oraz została opublikowana w dobrych oraz bardzo dobrych czasopismach matematycznych. W sumie są to trzy prace, które ukazały się w Journal of Mathematical Analysis and Applications [2], Nonlinear Analysis [3] oraz Mathematical Methods in the Applied Sciences [1]. Na szczególną uwagę zasługuje fakt, iż dwa pierwsze wymienione artykuły są samodzielne. Zdecydowanie jest to duży sukces doktorantki.

1 Charakterystyka wyników

W swojej rozprawie Doktorantka bada wiele kwestii związanych z zagadnieniem Stefana dla operatorów nielokalnych zarówno w czasie jak i przestrzeni. Główną ideą rozumowań jest wykorzystanie teorii półgrup analitycznych dla wymienionych wyżej obiektów. Dzięki temu możliwe jest udowodnienie istnienia, jednoznaczności i regularności badanych zagadnień. Dodatkowo Autorka znajduje dwa jawne rozwiązania dla zagadnień ułamkowych w przestrzeni i w czasie.

Rozdział pierwszy jest krótkim wprowadzeniem do rozprawy. Zaznaczone są w nim również fizyczne motywacje rozpatrywanego zagadnienia Stefana. Są one głównie oparte na względnie nowych pracach Vollera [5, 6, 7], w których uzasadnione jest użycie operatorów ułamkowych do opisu strumienia przepływu ciepła. W tym rozdziale Doktorantka opisuje również pokrótce zawartość swojej pracy doktorskiej oraz wskazuje swoje artykuły, w których opublikowała zawarte w niej wyniki.

Kolejny, drugi rozdział zatytułowany jest „Introduction". Zebrane są w nim podstawowe informacje niezbędne do dokładnego zrozumienia wyłożonego dalej materiału. Doktorantka zbiera w tej części definicje oraz liczne klasyczne rezultaty dotyczące teorii półgrup analitycznych, ułamkowych potęg operatorów (operator Balakrishnana) oraz operatorów ewolucyjnych. Tutaj również definiuje całki oraz pochodne ułamkowe. Stosując notację wybraną przez Autorkę są to: całka ułamkowa

$$I^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-p)^{\alpha-1}f(p)dp, \tag{1}$$

pochodna w sensie Riemanna-Liouville'a

$$\partial^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x (x-p)^{-\alpha}f(p)dp, \tag{2}$$

oraz pochodna Caputo

$$D^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-p)^{-\alpha}(f(p)-f(0))dp. \tag{3}$$

Definicje te są rozumiane w sensie punktowym i na szczególną uwagę zasługuje bardzo dokładana analiza dziedzin określoności powyższych operatorów. Doktorantka pokazuje również związek między potęgą operatora w sensie Balakrishnana oraz pochodnymi ułamkowymi. Dalej następuje wymienienie szeregu własności operatorów ułamkowych. Większość wyników jest znanych z folkloru jednak dla kompletności Doktorantka zamieszcza dowody ważniejszych z nich, które uzupełnia gdzieniegdzie swoimi rozumowaniami. Kilka wyników zawartych w tej części jest oryginalnych. Na przykład jest to ciekawy Lemat 2.34 o ograniczoności normy w przestrzeni Sobolewa przez normy związane z pochodnymi ułamkowymi [3]. Po dość dokładnym omówieniu teorii Doktorantka przechodzi do części fizycznej wprowadzenia. Podrozdziały 2.4 i 2.5 przedstawiają, kolejno, wyprowadzenia zagadnienia Stefana w wersji ułamkowej w przestrzeni i w czasie. W skrócie jest to standardowe zastosowanie prawa zachowania masy do strumienia zawierającego pochodną ułamkową. Rozumowanie jest szczegółowe oraz bardzo porządne. Czytelnikowi zainteresowanemu fizycznymi podstawami modeli matematycznych, na przykład Recenzentowi, brakuje jednak głębszych intuicji związanych z użyciem operatora Caputo w strumieniu. Wystarczyłoby kilka zdań uzasadniających fizyczne powody takiego a nie innego wyboru. Moja ostrożność w tej kwestii jest spowodowana ogromnym zalewem prac, które starają się modelować rzeczywiste zjawiska przez operatory nielokalne. Nie rzadko są one dodane „na siłę" i nie mają dostatecznie silnych podwalin fizycznych. Jednakże w przypadku rozprawy Doktorantki, Czytelnik od razu może zaspokoić swoje obawy sięgając do cytowanych prac Vollera. Chciałbym zaznaczyć, że powyższy komentarz w żadnym stopniu nie wpływa na moją ocenę pracy ponieważ jest ona zdecydowanie matematyczna oraz zawiera wyprowadzenia fizyczne w adekwatnym dla takiej rozprawy stopniu. Na koniec chciałbym nadmienić drobny problem z notacją dotyczącą operatorów ułamkowych wprowadzoną w tym rozdziale, który szczegółowo omówię w części drugiej recenzji.

Dalej następuje cykl trzech rozdziałów zawierających główne wyniki rozprawy. Są to bardzo obszerne rozumowania wymagające dużej znajomości teorii równań cząstkowych, półgrup analitycznych, operatorów ułamkowych oraz zagadnień ze swobodnym brzegiem. Bardzo dużo wyników wymaga trudnych i technicznych obliczeń oraz sprawnego posługiwania się ułamkowymi przestrzeniami Sobolewa (zdefiniowanymi na przykład przez interpolację). Doktorantka pokazuje tutaj swój bardzo wysokiej jakości warsztat matematyczny oraz umiejętność przemieszczania się między różnymi przestrzeniami funkcyjnymi, badania właściwości operatorów całkowo-różniczkowych oraz działania półgrupami analitycznymi z wymaganym rygorem matematycznym. Zanim przejdę do bardziej szczegółowego opisu wyników chciałbym zaznaczyć, że wywarły na mnie bardzo dobre wrażenie oraz pokazały dużą dojrzałość matematyczną Doktorantki.

W Rozdziale trzecim Autorka zajmuje się operatorem $\frac{\partial}{\partial x}D^\alpha$ czyli złożeniem zwykłej pochodnej oraz pochodnej Caputo. Operator ten można zapisać w innej postaci z wykorzystaniem pochodnej Riemanna-Liouville'a jednak wtedy otrzymujemy dodatkowy bardzo osobliwy składnik. Rozdział jest zaaplikowaniem standardowej teorii półgrup do pokazania, że powyższy operator generuje analityczną półgrupę kontrakcji działającym ze swojej dziedziny

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{u \in H^{1+\alpha}(0,1) : u_x \in {}_0H^\alpha(0,1),\ u(1) = 0\right\}, \tag{4}$$

w $L^2(0,1)$. Korzystając z twierdzenia Lumera-Phillipsa Doktorantka pokazuje najpierw, że $\frac{\partial}{\partial x}D^\alpha$ tworzy C_0-półgrupę kontrakcji, a później, że jest operatorem sektorialnym (wycinkowym). Dalsze rozumowanie prowadzi do udowodnienia analityczności półgrupy co implikuje istnienie, jednoznaczność oraz odpowiednią regularność rozwiązania zagadnienia parabolicznego

$$\begin{cases} u_t - \dfrac{\partial}{\partial x}D^\alpha u = f, & \text{na } (0,1)\times(0,T), \\ u_x \in {}_0H^\alpha(0,1),\ u(1,t) = 0, & \text{dla } t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{na } (0,1), \end{cases} \tag{5}$$

co poniekąd jest wstępem do dalszych rozważań o zagadnieniu ze swobodnym brzegiem. Dalsza część rozdziału to wykorzystanie tych wyników do zagadnień z różnymi wariantami niejednorodnych warunków brzegowych, na przykład Dirichleta $u(0,t) = g(t)$ lub z zadanym strumieniem $D^\alpha u(0,t) = h(t)$. Chciałbym podkreślić, że nawet samo sprawdzenie założeń klasycznych twierdzeń o półgrupach nie jest bynajmniej trywialne i wymaga dużego kunsztu, dokładności oraz zręczności w posługiwaniu się operatorami całkowymi. Doktorantce udaje się również rozszerzyć swoje wyniki na niejednorodności f niebędące w L^2, co ma związek z osobliwością związaną z warunkiem Neumanna. Wtedy bardziej praktyczna okazuje się metoda energetyczna, której stosowanie wymaga dużej ostrożności i pomysłowości w odcinaniu się od punktu osobliwego. Doktorantka w bardzo elegancki sposób łączy tutaj teorię półgrup z językiem rozwiązań słabych. Całość opublikowana została w pracy [2].

Kolejny, czwarty rozdział, jest zastosowaniem wyników otrzymanych w Rozdziale trzecim do rozwiązania zagadnienia Stefana z przestrzenną nielokalnością

$$\begin{cases} u_t - \dfrac{\partial}{\partial x}D^\alpha u = 0, & \text{na } \left\{(x,t) : 0 < x < s(t),\ 0 < t < T\right\}, \\ u_x(0,t) = 0,\ u(t,s(t)) = 0, & \text{dla } t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{dla } 0 < x < s(0) = b, \\ s'(t) = -(D^\alpha u)(s(t),t), & \text{dla } t \in (0,T). \end{cases} \tag{6}$$

Jest to główny problem, który leży w centrum rozprawy doktorskiej. Wyniki tego rozdziału zostały opublikowane w [3]. Strategia rozumowania pokrywa się z klasycznym podejściem do problemu Stefana. Najpierw zakładamy, że funkcja $s = s(t)$ jest znana dzięki czemu łatwo transformujemy zagadnienie do zadanego na dziedzinie cylindrycznej. Później zastosowanie teorii operatorów ewolucyjnych pozwala na uzyskaniu wyniki o istnieniu, jednoznaczności oraz regularności. Następnie za pomocą odpowiedniej zasady maksimum oraz twierdzenia Schaudera o punkcie stałym pokazujemy, że para (u, s) jest rozwiązaniem zagadnienia ze swobodnym brzegiem. Ostatecznie wynik o monotonicznej zależności od danych wejściowych pozwala uzyskać jednoznaczność. Nawet w klasycznym ujęciu żaden z powyższych kroków nie jest trywialny i wymaga dokładnej analizy i szczegółowych rachunków. W przypadku nielokalnym, natomiast, sytuacja jest jeszcze bardziej skomplikowana. Doktorantka świetnie sobie radzi ze wszystkimi trudnościami co wymaga ogromnej uwagi w przeprowadzaniu rachunków z operatorami całkowo-różniczkowymi oraz odpowiednio ogólnego spojrzenia na teorię. Sama adaptacja klasycznego rozumowania do przypadku ułamkowego jest wyczynem wymagającym dużej biegłości w analizie oraz głębokiego rozumienia faktów. Moją uwagę szczególnie przykuł Podrozdział 4.2.1 gdzie Doktorantka dowodzi kilku zasad maksimum dla operatora Caputo D^α. W Lemacie 4.11 udaje się jej osłabić założenia o regularności w stosunku do znanego wcześniej wyniku. Dodatkowo interesujące są wyniki podające oszacowania *a-priori* rozwiązania nielokalnego w przestrzeni zagadnienia Stefana. Ten długi i ciekawy rozdział kończy się konkretnym rezultatem, w którym Autorka konstruuje rozwiązanie samopodobne. Po odnalezieniu odpowiedniej grupy symetrii rozumowanie wiedzie Doktorantkę do analizy zagadnienia zwyczajnego choć nielokalnego w zmiennej samopodobnej. Udaje się jej skonstruować rozwiązanie podane w postaci jawnej za pomocą szeregu z dwoma stałymi całkowania, które następnie są wyznaczone przez zastosowanie warunków brzegowych (również nietrywialne rozumowania). Wydaje mi się, że przy odrobinie rachunków można przedstawić rozwiązanie ogólne (4.80) w innej postaci z wykorzystaniem funkcji Mittag-Lefflera z trzema indeksami. Nie sprawdziłem tego faktu i jest to jedynie moja hipoteza. Podsumowując uważam Rozdział czwarty za najciekawszy i najważniejszy w rozprawie gdzie Doktorantka udowodniła bardzo dużo istotnych rezultatów i pokazała swoją wysoką kulturę i klasę matematyczną.

W ostatnim już, Rozdziale piątym, Doktorantka rozważa zagadnienie Stefana z czasową nielokalnością i konstruuje samopodobne rozwiązanie tego zagadnienia. Wyniki tego rozdziału zostały opublikowane we wspólnej pracy z promotorem dr Kubicą [1]. Rozumowanie jest podobne do tego zamieszczonego na końcu poprzedniego rozdziału. Jednak przez inną naturę nielokalności wyniki sa odmienne i trudniejsze. W szczególności jawna postać rozwiązania jest bardzo skomplikowana i zdefiniowana przez kilkukrotnie iterowaną całkę z funkcji słabo osobliwych lub danych szeregiem rekurencyjnym. Powoduje to znaczący wzrost trudności w dalszych rozważaniach. Nawet zaaplikowanie warunków brzegowych nie jest łatwym zdaniem. Mi szczególnie spodobało się eleganckie rozumowanie pokazujące dodatniość rozwiązania. Rozdział kończy się ścisłym pokazaniem, że wraz z $\alpha \to 1^-$ powyższe rozwiązanie dąży do rozwiązania klasycznego.

2 Uwagi

Doktorantka wybrała język angielski jako ten, w którym napisała swoją rozprawę. Według mnie posługuje się nim na bardzo dobrym poziomie. Edytorska cześć pracy sprawia dobre wrażenie: język jest czytelny, dosyć płynny, a komunikacja z czytelnikiem spełnia normy dyskursu naukowego. Przypadki, w których opisy rozumowań stają się hermetyczne lub statyczne stanowią jedynie wyjątek w ogólnie bardzo dobrze przygotowanej rozprawie. Znalazłem dosłownie kilka literówek i błędów językowych, które w żaden sposób nie powodują utraty czytelności:

- str. 11, drugi akapit: powinno być „power-law",
- str. 13, Introduction: powinno być „into two parts" (bez „the"),
- str. 13, 2.1.1. Function spaces: powinno być „Absolutely continuous" (bez „The"),
- str. 16, Proposition 2.5: „A be a non-negative operator" (nie „an"),
- str. 19, Theorem 2.11: Czy zamiast „nevertheless" nie powinno być „moreover"? Podobnie w Theorem 3.6.

Jeśli chodzi o wybór materiału oraz matematyczną zawartość pracy mam kilka drobnych uwag związanych z notacją.

- W Definicji 2.2 (i w wielu miejscach dalej) pojawia się przestrzeń $L^2(0, L)$. Czytelnik bez problemu orientuje się w tej kwestii jednak, dla mnie, użycie L jako oznaczenia przestrzeni Lebesgue'a oraz prawego końca odcinka nie jest najlepszym wyborem. Rozumiem też, że jest to często używana notacja, którą można spotkać w literaturze.
- Na dole strony 32 wymieniony powyżej odcinek $(0, L)$ użyty w definicjach wielu przestrzeni funkcyjnych zostaje zastąpiony aż do końca rozprawy przez $(0, 1)$. Być może warto od samego początku użyć tego ostatniego?
- Wydaje mi się, że przestrzenie ${}_0H^\alpha$ oraz ${}^0H^\alpha$ wprowadzone na dole strony 32 (bez etykiety „Definition") z uwagi na swoją wagę powinny być zdefiniowane wcześniej. Być może mogłoby to być zaraz po Definicji 2.2. Przestrzenie te są ściśle związane z dziedzinami operatorów całkowania i różniczkowania ułamkowego i przez to zasługują na osobne wyróżnienie.
- Niektóre oznaczenia zbiorów mogłyby być bardzo krótko opisane kilkoma wyrazami. Na przykład przestrzeń operatorów ograniczonych B (str. 14) oraz zbiór rezolwenty $\rho(A)$ (str. 15).
- Autorka wybiera D jako oznaczenie dziedziny operatora (na przykład $D(A)$), oraz jako pochodną w sensie Caputo (na przykład $D^\alpha f$). Może to rodzić napisy w postaci $D(D^\alpha)$, które mogą sugerować, że mamy do czynienia ze złożeniem operatorów, a nie zbiorem. W (3.2) pojawia się dziedzina $D(\frac{\partial}{\partial x}D^\alpha)$, w której definicji znów pojawia się dwukrotnie litera D i oznacza co innego. Tutaj jednak Doktorantka wprowadza oznaczenie $\mathcal{D}_\alpha$, które jest znacznie lepsze. Może czytelniej by było od samego początku używać $\mathcal{D}$ jako oznaczenia dziedziny operatora?
- Sądzę, że notacja dla podstawowych operatorów pochodnych: Riemanna-Liouville'a oraz Caputo mogłaby być wybrana inaczej. Główny cel rozprawy to analiza równań cząstkowych. Zatem różniczkowanie (ułamkowe) względem odpowiednich zmiennych powinno być zaznaczone wyraźnie. Wszystko by było w porządku gdyby

rozważana była tylko nielokalność w przestrzeni - wtedy można by było umówić się z Czytelnikiem, że operatory dotyczą jedynie zmiennej x. Problem pojawia się w przypadku analizy zagadnienia z czasową nielokalnością gdzie występuje operator $D^{\alpha}_{s^{-1}(x)}$, który różniczkuje względem t. Oczywiście Doktorantka od razu podaje odpowiednią definicję i nie powoduje to utraty zrozumienia przez Czytelnika. Jednakże wprowadza to drobny konflikt z oznaczeniami przyjętymi dla pochodnych po przestrzeni: gdybyśmy chcieli obliczyć pochodną Caputo na odcinku $[a, T]$ powinniśmy napisać D^{α}_{a} co wymagałoby dodatkowego zastanowienia się nad różnicą między wersją czasową. Oczywiście ten dobór notacji nie jest to żadnym poważnym uchybieniem i zapewne wziął się z tego, że Rozdział piąty dotyczy innego zagadnienia niż dwa poprzednie.

Przejdę teraz do uwag związanych z merytoryczną zawartością pracy. Prosiłbym Doktorantkę o krótkie ustosunkowanie się do nich podczas publicznej obrony rozprawy.

- Czy szereg występujący w rozwiązaniu samopodobnym zagadnienia Stefana (4.80) może być przedstawiony jako pewna funkcja specjalna? Być może będzie ona należała do rodzinny funkcji Mittag-Lefflera w odpowiedniej wersji?

- Jaką półgrupę generuje operator $D^{\alpha}_{s^{-1}(x)}$ będący podstawowym obiektem w nielokalnym w czasie zagadnieniu Stefana? Czy dałoby się w tej sytuacji przeprowadzić podobną analizę istnienia, jednoznaczności oraz regularności jak w przypadku nielokalnym w przestrzeni?

- Czy istnieją fizyczne i matematyczne przesłanki na uogólnienie nielokalnego w przestrzeni zagadnienia Stefana na wyższe wymiary? Jaki operator nielokalny mógłby się wtedy pojawić?

- Według mnie w rozprawie bardzo brakuje stosownego podsumowania wyników oraz zestawienia z przypadkiem klasycznym. Zwłaszcza interesujące byłoby porównanie regularności rozwiązań w obu przypadkach. Czy możliwe są tam jakieś istotne różnice?

- Czy z matematycznego punktu widzenia (ale fizyczne ujęcie byłoby również bardzo mile widziane) jest możliwe użycie ułamkowego Laplasjanu w miejsce operatora $\frac{\partial}{\partial x}D^{\alpha}$? Czy miałoby to związek z rozszerzeniem dziedziny przestrzennej na zbiór $\mathbb{R}$?

Chciałbym podkreślić, że powyższe komentarze w żadnym aspekcie nie umniejszają wysokiej jakości wyników uzyskanych przez Panią Ryszewską. Mam jednak nadzieję, że być może pomogą w dalszej pracy nad zagadnieniami w tym i pokrewnych tematach.

3 Konkluzja

Moja ocena rozprawy doktorskiej mgr Katarzyny Ryszewskiej jest bardzo dobra. Uważam, że Doktorantka udowodniła w niej fakt, że orientuje się w teorii równań różniczkowych cząstkowych na tyle biegle, że potrafi wykorzystywać jej narzędzia aby badać zagadnienia związane z analizą operatorów nielokalnych. Ponadto czyniąc to posługuje się wieloma obiektami w wyjątkowo sprawny sposób przeprowadzając często skomplikowane rachunki. Z pewnością wyniki otrzymane przez Doktorantkę będą miały znaczący wpływ na światową literaturę. Z jednej strony poruszony temat jest aktualny i ważny, a z drugiej jakość wyników Pani Ryszewskiej jest bardzo wysoka. Aby poprzeć tę tezę nadmienię, że jedna z prac Autorki [3] opublikowana zaledwie kilka miesięcy temu, jest już cytowana przez pracę J.L. Vasqueza, J.Endala oraz F. del Teso [4]. Dwóch pierwszych autorów to ścisła czołówka światowa w równaniach cząstkowych, natomiast trzeci jest wybitnym doktorantem pierwszego. Jestem pewien, że jest to jedynie wierzchołek góry lodowej dalszych sukcesów naukowych Doktorantki.

Z całym przekonaniem uważam, że przedstawiona rozprawa doktorska spełnia z naddatkiem ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim w dyscyplinie matematyka. **Wnoszę o dopuszczenie Doktorantki do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Ponadto ze względu na wysokiej klasy ważne, trudne i liczne wyniki otrzymane przez Doktorantkę chciałbym wysunąć wniosek do Rady Naukowej Dyscypliny Matematyka Politechniki Warszawskiej o wyróżnienie niniejszej rozprawy doktorskiej.**

Literatura

[1] Adam Kubica and Katarzyna Ryszewska. A self-similar solution to time-fractional stefan problem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences (DOI: 10.1002/mma.7028)*, 2020.

[2] Katarzyna Ryszewska. An analytic semigroup generated by a fractional differential operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 483(2):123654, 2020.

[3] Katarzyna Ryszewska. A space-fractional stefan problem. *Nonlinear Analysis*, 199:112027, 2020.

[4] Félix del Teso, Jørgen Endal, and Juan Luis Vazquez. The one-phase fractional stefan problem. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, pages 1–49, 2020.

[5] Vaughan R Voller. On a fractional derivative form of the green–ampt infiltration model. *Advances in water resources*, 34(2):257–262, 2011.

[6] Vaughan R Voller. Fractional stefan problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 74:269–277, 2014.

[7] Vaughan R Voller, Federico Falcini, and Roberto Garra. Fractional stefan problems exhibiting lumped and distributed latent-heat memory effects. *Physical Review E*, 87(4):042401, 2013.

Łukasz Płociniczak